LECȚIA 2

PREZENTAREA ŞI DISCUTATEA UNOR PROBLEME DATE LA SIMULĂRILE PROBEI DE BACALAUREAT

…se apropie…

- **La nivelul fiecărui judeţ, precum şi în municipiul Bucureşti, în vederea orientării activităţilor voastre de recapitulare, s-au organizat în acest an simulări ale probelor de examen.**
- **Având în vedere că vineri, 26 aprilie, la nivelul Bucureştiului, se va organiza o nouă simulare a probei de matematică din cadrul examenelor naţionale, în întâlnirea de astăzi vom discuta câteva subiecte date anterior la simulare.**

SUBIECTUL I

1. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $|x-1| = 2x-5$.

- comentarii

SUBIECTUL I

1. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $|x-1| = 2x-5$.

Rezolvare:

→ **ecuație cu necunoscuta** x **în cadrul unui modul;**

→ **cazurile pe care le generează modulul sunt:**

$|x-1|$ poate fi $x-1$ sau $1-x$

→ **modulul oricărui număr real este un număr mai mare sau egal cu 0, deci trebuie impusă condiția:**

$2x-5 \geq 0$, de unde obținem $x \geq \dfrac{5}{2}$;

SUBIECTUL I

1. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $|x-1| = 2x-5$.

→ **abordarea pe cazuri conduce la valori corespunzătoare fiecărui caz, dar aceste valori pot fi acceptate ca soluții <u>numai în cazul în care verifică inegalitatea anterior obținută</u>:**

Din ecuația $x-1=2x-5$ se obține $x=4\geq\frac{5}{2}$, deci acceptăm această valoare ca soluție a ecuației inițiale.

Din ecuația $1-x=2x-5$ se obține $x=2<\frac{5}{2}$, care nu îndeplinește condiția problemei.

În concluzie, ecuația inițială admite doar soluția reală $x=4$.

SUBIECTUL I

1. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $|x-1| = 2x-5$.

- **Greșeli frecvent întâlnite :**

  - **Nu se cunoaște definiția modulului .**
  - **Se uită a se verifica soluțiile găsite sau echivalent cu acest fapt.**

2. Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația $\frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{2}$.

- Comentarii

2. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale inecuaţia $\frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{2}$.

Rezolvare:

→ inecuaţie pe mulţimea numerelor reale (!);

→ deoarece numitorul primei fracţii este o expresie care poate fi atât pozitivă cât şi negativă, eliminarea numitorilor fără a ţine cont de semnul numitorilor, în inegalitate, este o abordare greşită.

2. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale inecuaţia $\frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{2}$.

În aceste condiţii, considerând că $x+1 \neq 0$ vom avea cazurile:

Pentru $x+1>0$,
înmulţim membru cu membru inecuaţia cu $2(x+1)>0$
pentru a elimina numitorii, fără a se schimba sensul inegalităţii,
şi obţinem inecuaţia $x+1 \geq 2$,
de unde o primă parte a soluţiilor este
$S_1=[1,+\infty)$
Pentru $x+1<0$,
înmulţim membru cu membru inecuaţia cu $2(x+1)<0$
pentru a elimina numitorii, **cu schimbarea sensului inegalităţii**,
şi obţinem inecuaţia $x+1 \leq 2$,
de unde o a doua parte a soluţiilor este $S_2=(-\infty,1] \cap (-\infty,-1)=(-\infty,-1)$.
În final, mulţimile de soluţii corespunzătoare fiecărui caz se reunesc, formând soluţia finală a inecuaţiei iniţiale,
$S=S_1 \cup S_2=(-\infty,-1) \cup [1,+\infty)$.

2. Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația $\frac{1}{x+1} \le \frac{1}{2}$.

- **Greșeli frecvent întâlnite:**
  - **Eliminarea numitorului în inegalități,în condiții în care numitorii nu au semn constant;**
  - **Nu este cunoscut semnul funcției de grad I;**
  - **Nu se cunosc proprietățile relației de inegalitate.**

4. Determinați numărul submulțimilor mulțimii $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, submulțimi care nu conțin elementul 1.

- Comentarii

4. Determinați numărul submulțimilor mulțimii $\{1,2,3,4,5,6\}$, submulțimi care nu conțin elementul 1.

Rezolvare:

→ problemă de numărare, în contextul determinării numărului de submulțimi ale unei mulțimi date, în condiții prestabilite.

4. Determinați numărul submulțimilor mulțimii $\{1,2,3,4,5,6\}$, submulțimi care nu conțin elementul 1.

Cerința este echivalentă cu a determina numărul de submulțimi ale mulțimii $\{2,3,4,5,6\}$.

→ un rezultat important în cadrul capitolului este:

Numărul de submulțimi ale unei mulțimi cu n **elemente,** $n \in \mathbb{N}$
este egal cu 2^n.

În cazul de față, mulțimea $\{2,3,4,5,6\}$ are 5 elemente ($n=5$),

deci numărul de submulțimi este egal cu $2^5 = 32$.

4. Determinați numărul submulțimilor mulțimii $\{1,2,3,4,5,6\}$, submulțimi care nu conțin elementul 1.

- **Greșeli frecvent întâlnite:**
  - **Confuzii între numărul tuturor submulțimilor unei mulțimi și numărul submulțimilor având *k* elemente ale unei mulțimi cu *n* elemente.**
  - **Se omite la numărare mulțimea vidă.**

În continuare vom lua în discuție câte unul din subiectele de analiză matematică din materia claselor XI-XII.

SUBIECTUL III, PROBLEMA 1

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ şi şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ dat de relaţiile $x_1=1$, $x_{n+1}=f(x_n)$.

a) Calculaţi derivata funcţiei f.

- Comentarii

SUBIECTUL III, PROBLEMA 1

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ şi şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ dat de relaţiile $x_1=1$, $x_{n+1}=f(x_n)$.

a) Calculaţi derivata funcţiei f.

$$f'(x)=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}(x+\sqrt{x^2+1})'$$

$$f'(x)=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$, oricare $x\in\mathbb{R}$.

SUBIECTUL III, PROBLEMA 1

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ şi şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ dat de relaţiile $x_1=1$, $x_{n+1}=f(x_n)$.

a) Calculaţi derivata funcţiei f.

Greşeli frecvent întâlnite:

- **Nu se cunosc formulele pentru derivare.**
- **Nu se efectuează toate calculele până la obţinerea rezultatului final.**

SUBIECTUL III, PROBLEMA 1

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ şi şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ dat de relaţiile $x_1=1$, $x_{n+1}=f(x_n)$.

b) Determinaţi monotonia şirului $(x_n)_{n\geq 1}$.

- Comentarii

SUBIECTUL III, PROBLEMA 1

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ și șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ dat de relațiile $x_1=1$, $x_{n+1}=f(x_n)$.

b) Determinați monotonia șirului $(x_n)_{n\geq 1}$.

$x_2=\ln(1+\sqrt{2})<1=x_1$, deoarece $1+\sqrt{2}<e$

Deoarece $f'\geq 0$, funcția este crescătoare, deci $x_n\geq x_{n+1}$ implică $x_{n+1}=f(x_n)\geq f(x_{n+1})=x_{n+2}$

Rezultă inductiv că șirul este descrescător.

SUBIECTUL III, PROBLEMA 1

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ şi şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ dat de relaţiile $x_1=1$, $x_{n+1}=f(x_n)$.

b) Determinaţi monotonia şirului $(x_n)_{n\geq 1}$.

- **Greșeli frecvent întâlnite:**
  - **Nu se face legătura dintre monotonia funcției și monotonia șirului,**
  - **Se folosesc afirmații ” funcție crescătoare implică șir crescător”**

SUBIECTUL III, PROBLEMA 1

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ şi şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ dat de relaţiile $x_1=1$, $x_{n+1}=f(x_n)$.

c) Arătaţi că $f(x+e)-f(x)\leq e$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

- Comentarii

SUBIECTUL III, PROBLEMA 1

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ şi şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ dat de relaţiile $x_1=1$, $x_{n+1}=f(x_n)$.

c) Arătaţi că $f(x+e)-f(x)\leq e$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

$f(x+e)-f(x)=ef'(c_x),\ c_x\in(x,x+e)$

Cerinţa rezultă din $f'(c_x)\leq 1$, oricare ar fi c_x.

SUBIECTUL III, PROBLEMA 1

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ și șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ dat de relațiile $x_1=1$, $x_{n+1}=f(x_n)$.

c) Arătați că $f(x+e)-f(x)\leq e$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

- **Greșeli frecvente:**
  - **Nu se face legătura cu teorema Lagrange, aceasta nefiind familiară.**

Propunem câteva exerciții spre rezolvare:

- Bacalaureat sesiunea iunie iulie 2008/sursa:www.edu.ro

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 076

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1}$.

5p **a)** Să se arate că graficul funcției f admite asimptotă orizontală spre $+\infty$.

5p **b)** Să se studieze monotonia funcției f.

5p **c)** Să se calculeze $\lim_{n \to \infty} \left(\frac{f(1) + f(2) + \ldots + f(n)}{n} \right)^n$.

2. Se consideră șirul $(I_n)_{n \geq 1}$, $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1 - x^2}\, dx$.

5p **a)** Să se calculeze I_1.

5p **b)** Să se arate că $(n+2) I_n = (n-1) I_{n-2}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim_{n \to \infty} I_n$.

Bacalaureat sesiunea iunie iulie 2008/subiect de rezervă/sursa:www.edu.ro

SUBIECTUL III (30p) – Varianta 046

1. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{|\ln x|}{\sqrt{x}}$.

5p **a)** Să se arate că f nu este derivabilă în punctul $x_0=1$.

5p **b)** Să se determine numărul soluțiilor reale ale ecuației $f(x)=m$, unde m este un parametru real.

5p **c)** Să se arate că $3^{\sqrt{5}}<5^{\sqrt{3}}$.

2. Fie funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\int_0^x t\sin 2t\,dt$ și $g:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R},\ g(x)=\int_0^{\cos^2 x}\arccos\sqrt{t}\,dt$.

5p **a)** Să se calculeze $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

5p **b)** Să se arate că $g'(x)=-x\sin 2x, \forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

5p **c)** Să se demonstreze că $f(x)+g(x)=\frac{\pi}{4}, \forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.